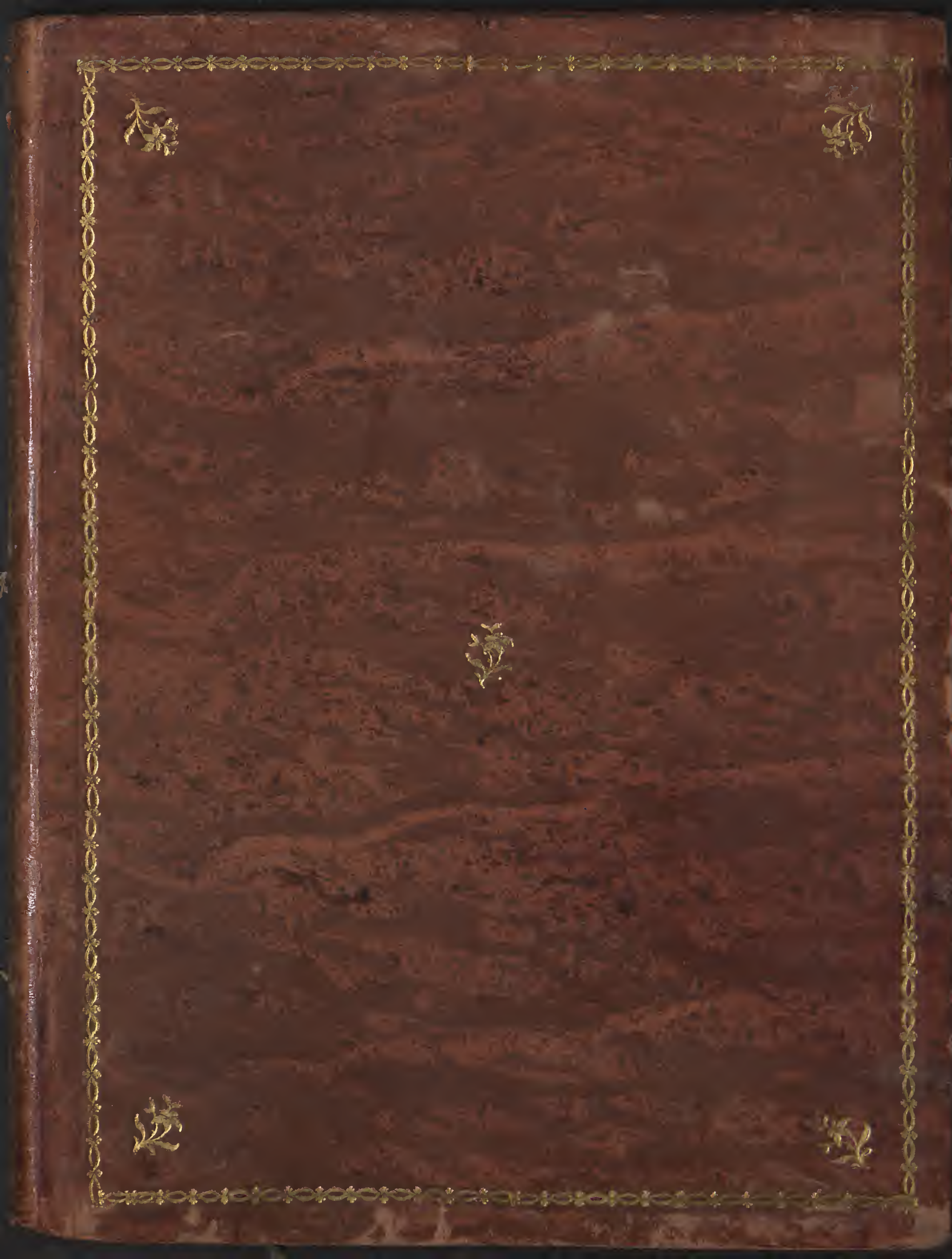



REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
Plana - II - 26.

DISCORSO
IN LODE
DI LUIGI LA-GRANGE

RECITATO DAL PROFESSORE

GIAMBATTISTA MAGISTRINI

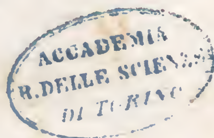
NELLA PONTIFICIA UNIVERSITÀ

DI BOLOGNA

PEL SOLENNE APRIMENTO

DELL' ANNO SCOLASTICO 1818-19.





BOLOGNA 1819.

PER LE STAMPE DI ANNESIO NOBILI

Con Approvazione.

DISCORSO

IN LODE

DI LUIGI LA-GRANGE

Tutto per mio avviso non adempiono l'assunto loro quelli Eruditi, che la preminenza difendendo dell'Italia negli Studj, e nelle Arti di pace van ripetendo sopra ogn'altro il vanto di lei d'aver la prima ripristinate le norme della vera, ed elegante filosofia, d'averne insegnato altrui lunga serie di fondamentali scoperte. Perciocchè i nostri Maggiori viveano in mezzo a quanto di bello, e grandioso avea prodotto l'antichità; e le stesse rovine del perpetuo lor guereggiare doveano ad ogni passo ricondurre al loro sguardo sotto tutti gli aspetti quelli innumerevoli avanzi, e modelli dell'antica coltura. E non è maraviglia, che alla possente ripetuta impressione di tanti monumenti si destasse qui di buon'ora il sentimento delle sociali virtù, e che in tanta dovizia di mezzi, e di materiali già tra noi preesistenti qui prima che altrove sorgessero i fondamenti del moderno edifizio delle Arti, e delle Scienze. Vinceste allora, dir potrebbero a noi gli stranieri, come già Tullio ai Greci, una corona, per la quale noi non contrastammo. Anzi più d'un'età noi vi abbandonammo i nostri Bardi, e Trovatori, e punto non curammo ciò, che il robusto lor canto potè lasciare di ragion nostra nella vostra poesia nascente. Ma noi vi abbiam superati per disciplina, e per valor militare; noi vi governammo colle nostre leggi; e quelle, che la sorte vi diè di scoprire, da voi stessi per secoli dimenticate, son opera in parte dei nostri antichi Sapienti, siccome lavoro sono delle lor mani i modelli, che possedete d'ogni bell'arte. Lode sia a voi, che sì bell'uso ne faceste; ma non

volgete a nostro disonore l'esser noi venuti nelle scuole vostre a riconoscere nelle prime vostre imitazioni il genio, e la gentilezza dei nostri Padri. Lode sia a voi, che primi tornaste nel comune aringo del vero onore; ma a noi non si neghi la palma, che nel seguirvi abbiamo ugualmente meritata. Questa è la ben giusta domanda, e questo il punto veramente decisivo, al quale, io penso, mirar dovrebbe ogni nostra discussione nella pacifica, e sopra ogn'altra onorata gara, di cui si tratta. Perciocchè sarebbe ugualmente ingiusta pretensione il voler pareggiare a tutto il complesso dei lumi presenti quel solo nostro retaggio di primitive cognizioni, e negligenza insoffribile, e segno certo di vicin ritorno all' antica salvatichezza l' abbandonare altrui ciò, che fu opera nostra nel progressivo incremento del patrimonio comune. In fatti le Greche Città famose, mentre disputavano pel vanto d' aver dato culla, e ricetto ad Omero, gareggiavano con pari emulazione in far rivivere ne' loro figli il divino Cantore: nè bastò alla Magna Grecia il lungo possesso della Scuola, e della Sapienza di Pitagora, ma dovette restituire a se stessa il mal ricompensato Maestro con lunga successione di non men chiari Discepoli prima di conseguire il glorioso titolo di primaria sede del sapere.

Ora a soddisfare a sì grave debito, io ben sento, Uditori, quanto degna occasione sarebbe la solennità di questo giorno destinata a celebrare la memoria di qualcuno fra gli Italiani, che più meritarono nèlla carriera del bello, e del vero, e a tramandarne ai posteri la memoria per questi virtuosi Allievi novelli. Nè d' uopo avrei certamente di ricercare fuori di questo fiorentissimo Stato il favore, e l' eccitamento degli antichi illuminati Principi nostri, o lungi da questa Patria stessa la generazione tuttor vivente dei fondatori della sua gloria primiera. Che dir potrei, come il Regno dell'immortale PIO VII. ha già segnato un' epoca nelle Arti, alla quale per comune consenso dell' Europa intera i soli migliori tempi della Grecia si ponno paragonare; e mostrar potrei, come in questa Università non sono spenti ancora i bei giorni dei Morgagni, dei Lancisi, e dei Manfredi. E in questo Capo novello, ornamento preclaro di Santa Chiesa, modello di tante virtù, e di tanta coltura, che oggi rinova in quest' Aula la presenza della Maestà Sovrana, quanto caro, e prezioso pegno non abbiam noi, o Colleghi, dell' alta protezione, che pei nostri studi non meno, che per quest' inclita Città, e Provincia nutre il paterno cuore del Santissimo Principe? Ma il tempo a questa funzione prescritto verrebbe meno, se tutto volessi discorrere il vasto argomento; oltrechè sarebbe inutile ragionare e della costante liberalità appo noi di Principi Mecenati, e del non interrotto progresso di molte nobilissime discipline, e di tutti gli altri pregi, pei quali ogni colta nazione ci applaude tuttora, e ammira. Osservando però, che i grandi progressi delle scienze Fisico-Matematiche andarono mai sempre congiunti ad ogn' al-

tra maniera di lumi, e sempre furono l'ultima prova della benignità del clima, e della buona tempra degli ingegni, che li hanno operati, e dell'eccellenza delle sovrane instituzioni, che li favorirono, non si troverà punto mancare al nobile scopo dell'odierna Funzione accademica il mio divisamento di mostrare fra gli Italiani un Geometra, che ogn'altro superò in un tempo, in cui più alto moveano di se il grido gli stranieri in queste scienze, e in cui il progredire nelle medesime era maggior prova d'ingegno, e sommo vantaggio per le scienze tutte.

Dappoichè Cavalieri, Cassini, e Guglielmini compiendo mercè l'usato patrocinio dei Sommi Pontefici il glorioso periodo da Galileo incominciato del valore Italiano negli Studi Matematici confermarono questa Università nel possesso della chiara fama, che già le aveano procurata Scipion Ferro, e Cardano nell'epoca antecedente; i Dotti stranieri s'accinsero con tanto impegno a coltivarne gli insegnamenti, e le scoperte, e seppero farvi tali aggiunte, che furono riguardate come nuova opera loro, e se ne disputò ben anche fra intere nazioni il merito della prima invenzione. Sorse in fine quell'insigne triumvirato di Daniele Bernoulli, Eulero, e D'Alembert, il quale sembrava destinato ad ecclissare la gloria di tutti i Geometri viventi, e le cui dottrine già cominciavano a tenere il primato nelle nostre scuole medesime. Ma fosse per restituire all'Italia l'onore del felice incominciamento di sì brillanti successi, fosse, perchè altrove meglio che in seno a questa Tutrice d'ogni sapere tentar non se ne potesse l'ultimo compimento; il Genio delle scienze preparava intanto là sulla Dora un novello Galileo, il quale richiamando ad esame le scoperte di due secoli tanto vi spanderebbe dell'antica luce nativa, che formerebbero la maraviglia dello stesso Eulero, e dello stesso d'Alembert, e tornerebbero per la seconda volta di là dalle Alpi con fortuna assai migliore di quella, che era toccata alla Geometria di Cavalieri, e di Torricelli.

È questo, sapientissimi Uditori, l'encomio di La-Grange, e questo è l'avvenimento memorabile da lui operato nelle Scienze Fisico-Matematiche. Del quale tanto benemerito Italiano appena io oserei pronunziare il nome da questa cattedra, se riguardar dovessi al corredo di dottrina, e di eloquenza, che si converrebbe a uguagliare con degna laudazione l'onor della presenza in questo preludio scolastico di un Consesso per autorità, e per dottrina tanto rispettabile, e la gioja, e la riconoscenza comune per sì bella sanzione della felicità dei nostri studi. Se non che mi diè coraggio il considerare, che la gloria di lui è pur quella dei primi Maestri di questa stessa Università, ed è vanto insieme di quel felice Regno, che possiede nell'Augusto Vittorio Emanuele l'Ospite, e l'Amico della Santità di Nostro Signore, di quella patria dei Colombo, dei Campano, dei Rasario, e di cent'altri restauratori precoci dell'Italiana coltura, la quale facea precedere questo

prodigio della moderna Geometria, mentre s' apprestava a restituire del pari all' Italiano Coturno i primi onori. Sì degni, e cari titoli della mia scelta, confidai, che trovato avrebbero facile scusa all' incolta mia orazione, e benigna accoglienza al mio buon volere.

Nacque Luigi La-Grange in Torino nel giorno 25. di Gennajo dell' anno 1736. di onesta, e civile famiglia. Nei primi anni di sua gioventù, nei quali rintracciar dovremmo negli esempj degli avi, e nell' educazione domestica, o nelle instituzioni, e nel pubblico incoraggiamento della patria i primi suoi passi nelle lettere, e nella filosofia, e gli indizj della celebrità, che acquistossi, egli ci si presenta già Fisico, e Geometra distinto; e non solamente egli è già fornito delle dottrine Matematiche più elevate del suo tempo, ma vi divenne eziandio inventore egli stesso, e vi spiegò tali prove di maturo ingegno, che superano quanti la Storia ci ha conservati esempj di questo genere. In fatti non toccava ancora l' età di 19. anni, che già era professore della R. Scuola d' artiglieria di Torino, e non ancor giunto agli anni 23. offriva cogli illustri fisici Conte di Saluzzo, e Cigna al suo Sovrano quel primo volume della patria Società Filosofica, di cui la parte, che a lui appartiene, basterebbe sola a procurare rinomanza al più provetto fisico, e calcolatore. L' elogio adunque di La-Grange vuol esser tratto immediatamente dalle di lui opere, e non ha d' uopo d' esser preceduto da una storia, nè da un elogio sussidiario della sua prosapia, e de' suoi institutori. Perciocchè la natura verso di lui prodigiosamente liberale lo volle sottrarre al lungo tirocinio della comune educazione, e volle, dirò così, derogare per lui la legge dell'ordinario sviluppo dell'umano intelletto. Ma qual è la parte delle Matematiche facoltà, nella quale La-Grange raggiunse più dappresso l' ultima perfezione, o quale fu lo scopo, a cui mirò più generalmente nelle sue ricerche? Questa notizia già per se stessa interessante, e indispensabile per una ben intesa esposizione di settant' anni di continue scoperte invano si cercherebbe esaminando ad una ad una separatamente le produzioni moltiplici di lui; che in tutte fu del pari eccellente, e in tutti i più rimoti angoli della scienza uguali vantaggi da tutte derivarono: bensì riuscirà a discoprirla chi ponga mente nel tempo stesso a tutto insieme il complesso delle di lui opere, e all' epoca, in cui ebbero incominciamento.

La Filosofia troppo immaginosa, e fiorita, che minacciava da un estremo i danni, che per l' altro rimproverava essa stessa alla timida, e superficiale dei secoli antecedenti, già piegava a miglior senno in quest' epoca, e già rendea pubblico omaggio ai progressi dell' austera Geometria, e della Storia Naturale: presso ogni colta nazione e Principi, e Accademie moltiplicavano a gara viaggi, sperienze, e osservazioni; e lo studio della natura trovavasi arricchito d' immensa copia di fatti, e di materiali i più opportuni, onde salire al più alto grado di

perfezione. Ma più s' aumentano le cognizioni di fatto, e i mezzi di moltiplicarle, vieppiù cresce il bisogno di perfezionare il sistema intellettuale, la geometria, e il calcolo sopratutto, al cui metodo, e rigore, se non sempre alle cifre, e alle figure, dato è soltanto l' aprire largo, e sicuro il passo alla ragione. Per la qual cosa molti dei più valenti Fisici, e Geometri s' affaticavano di nuovo attorno a questo universale strumento, cui già più non bastavano i miglioramenti di Cavalieri, di Newton, e di Leibnitz; e molti precorrevano colla scorta di esso chi a rintracciare le cause, e le leggi tuttora ignote di molti fenomeni già osservati, chi a discoprirne dei nuovi all'osservazione inaccessibili, chi a rettificare ipotesi già ricevute, chi a divisarne delle nuove non sempre inopportune pei fenomeni avvenire, sempre feconde di nuove conquiste nel regno intellettuale, e nell' arte del calcolo. Ma i risultati comechè pregevolissimi di questi isolati, e disgiunti tentativi erano ancora troppo scarsi, nè tutti ben collimavano all' intento. Molte sublimi ricerche del più urgente bisogno erano ancora intatte, mancava in molte la necessaria generalità, e in tutte si desiderava la precipua condizione, l' uniformità, e l' evidenza dei metodi, e dei principj, che venivano impiegati. Se ora volgete meco, Uditori, attento lo sguardo sull' intera serie delle opere di La-Grange, vedrete chiaramente in questo grandioso provvedimento scientifico il vero, e perpetuo scopo delle profonde sue meditazioni. Perciocchè dappertutto lo troverete intento a quell' altissimo problema, che tutta ne abbraccia l' estensione, del quale se l' Autor della natura non concesse all' uomo di toccar l' ultima cima, non gli negò il diletto di mirarla da lungi, e la forza di sempre più avvicinarvisi = Sopra inconcussi, e diretti principj fondare una Meccanica universale, e puramente algebrica, la quale offra mediante la semplice numerica traduzione de' suoi elementi, e delle sue formole pronta compiuta, e rigorosa spiegazione, e misura dei particolari fenomeni della Meccanica Fisica. Da questo problema incominciò La-Grange, con questo finì la sua carriera. E tale fu il suo attaccamento a questa prediletta impresa, che tutte le di lui invenzioni e per la necessaria connessione, che tengono con essa, e per l' origine, che ebbero comune, hanno ben anche reso inutile nell' elogio di lui l' artifizio di qualunque loro classificazione, e particolare collocamento, e con essa costituirono un edifizio matematico mirabilmente coordinato, e perfetto, dalla cui sola ispezione tutto può rilevarsi il valore del sovrano Architetto. Della quale singolare, e fortunata circostanza profitterò ben io interamente; che più facile e piana via non potrei rinvenire, onde aspirare al precipuo intento d' ogni utile elogio, a mostrare con tutta fedeltà il genio di La-Grange, quale da se stesso naturalmente si produsse: e imiterò, quanto io saprò meglio, il prudente spettatore della natura, il quale posto in elevato, e sereno orizzonte s' astiene dal prevenire coll' arte d' estraneo lume le maraviglie del Sol nascente.

Premette il Segretario Cigna nel citato primo volume della Società di Torino la storia di numerose ricerche, e sperienze da lui eseguite in compagnia di La-Grange, e del Conte di Saluzzo, di gran parte delle quali rende egli stesso tutto l' onore al giovine Collega. La spiegazione, per esempio, proposta da Balbi delle diverse altezze del mercurio in barometri di diametro diverso, l' inconveniente di non potersi far uso dei barometri senza l' aggiunta di un termometro, cui perpetuamente confrontarne la temperatura; il fenomeno dell' estinzione della fiamma nell' aria chiusa furono le parti, che La-Grange ebbe a suo carico in quelle fisiche esercitazioni. E gli sperimenti da lui immaginati, e i ragionamenti da lui instituiti gli meritarono il comune applauso, sicchè *Clarissimus Auctor jam exploratum narrasse, potiusquam novum proposuisse videretur.... ut nihil in hac re desiderari amplius posse videatur*, conchiude Cigna le sue relazioni. Dei quali primi saggi avea ben già egli dato innanzi nobilissima caparra in quella riputatissima lettera, che diresse, correndo soltanto l'anno 18. dell' età sua, al celebre Conte di Fagnano, in cui mostrò la bella analogia tra l'algoritmo Differenziale, e la formola di Newton, e concentrando in un solo i due teoremi famosi di Taylor, e di Giovanni Bernoulli mirabilmente semplificò le primarie, e più frequenti operazioni del calcolo Differenziale, e Integrale, trovato ben tutt' altro che fisico, ma che attestava nell' Autore quanta acutezza, e sagacità nelle più sottili fisiche investigazioni si possa desiderare.

Le operazioni della natura sono subordinate a un massimo, o minimo grado or di grandezza, or d' intensità, or di convenienza; e un massimo, o minimo risultamento degli agenti naturali è per lo più il voto, e 'l bisogno principale del Fisico, e dell' Artista, che li mette in opra. Ma la natura in questo più che in qualunque altro punto suol esser restìa a svelarsi, e sembra, che alla ragione abbia qui riservato i suoi secreti piuttosto che all' esperienza, e all' immediata osservazione. Il genere di fisiche ricerche, cui ebbe parte La-Grange in que' primi esercizi Accademici, era ben tale da fargli conoscere quest' arduo scoglio dell'arte sperimentale. L'unico mezzo di evitarlo stava riposto nella dottrina analitica dei massimi, e dei minimi. Ma questa parte medesima della geometria, e del calcolo era ancora assai limitata; e sopra tutto mancava di mezzi diretti, e spediti per distinguere compiutamente l' esistenza dei massimi dall' esistenza dei minimi, gli elementi, dai quali dipendono, essendo più di due, nel caso stesso, in cui la legge di mutua dipendenza fra loro di questi elementi variabili è determinata. A rimuovere sì grave impedimento diresse prima di tutto La-Grange la sua industria analitica; scoprì i veri criterj immutabili cercati; e assegnò le formole più comode, ed eleganti per eseguire in ogni caso sì importante separazione presentandone alla Società due dimostrazioni differenti, additando l' origine dell' imperfe-

zione del metodo fino allora seguito, e tutto verificando con bella riprova di due problemi geometrico uno, e meccanico l' altro. Così nella prima sua memoria recava egli a inaspettato compimento la chiave delle più preziose, e recondite verità fisiche, e intellettuali, risultato ben degno di comparire in fronte alla lunga serie delle opere di lui, e all' insigne collezione della nascente Società Filosofica di Torino.

D' Alembert avea trovato un artifizio semplice, e ingegnoso per integrare una classe importante delle equazioni Differenziali, che lineari si chiamano. Il nostro Geometra s' accorge, che il metodo è applicabile anche alle equazioni della stessa forma a Differenze Finite. Eseguisce in una seconda memoria questa felice applicazione, e questo primo notabile avvicinamento dei due calcoli integrali richiamando nel tempo stesso ad una sola equazione di questo genere tutta la dottrina delle serie ricorrenti.

Non si creda però, che tanta facilità nell' arte del calcolo, e sì lusinghieri risultati siano per sedurre il giovine La-Grange, e trattenerlo lungamente sul cammino della pura speculazione. Egli stesso in entrambe queste prime dissertazioni ci prova chiaramente essere sua massima, che non convenga dar mano a nuove invenzioni analitiche, e geometriche prima di porre, quanto più si può, le già note a profitto delle scienze positive, e delle arti. Di fatto nella seconda promette un nuovo calcolo delle probabilità, e nella prima niente meno che un nuovo trattato di Meccanica fondato sopra il principio della minima azione, promessa grandiosa, e inaspettata, la quale fissa l' epoca vera della prima diretta esecuzione del piano da principio annunziato delle future di lui meditazioni.

Ma chi avrebbe creduto, che nell' anno stesso in quello stesso primo volume dopo d' aver tenuto il primato fra' suoi Colleghi veterani come sperimentatore, mentre dava compimento alla riforma di un metodo analitico uscito poc' anzi dalla penna d' un Maclaurin, e d' un Eulero, e ne riproduceva a nuovo uso estesissimo un altro di d' Alembert, e meditava d' entrambi le più sublimi applicazioni, questo giovine di 23 anni volgesse in animo quelle immense ricerche sulla natura, e propagazione del suono, e sulla teorica delle corde vibranti? Newton avea assegnato un' espressione della velocità del suono, che poco si allontanava dall' esperienza; ma la teorica, alla quale l' avea appoggiata, da altri non era intesa, da altri era impugnata. Fra questi eran primi Cramer, ed Eulero. Un compiuto esame della quistione è l' assunto novello del valoroso La-Grange. Dopo una diligente e fedele esposizione della teoria di Newton, della quale dimostra vittoriosamente l' insufficienza, s' innoltra egli stesso al diretto scioglimento del problema. Ben presto s' imbatte nell' importante, e curiosa osservazione di d' Alembert, che le equazioni di questo non differiscono punto da quelle del problema delle corde vibranti. Ma questa stessa analogia gli

mette a fronte oltre Newton i sommi Geometri Taylor, d'Alembert medesimo, Eulero, e Daniele Bernoulli, che intorno alle corde vibranti con vario esito, ma tutti con grande riputazione aveano faticato. La-Grange pone subito innanzi coraggioso in bel prospetto i principj, e i metodi adottati da ciascun d'essi, li confronta, e addita il diverso grado di generalità delle loro soluzioni, sul qual punto pendeva grave controversia tra Eulero, e d'Alembert, e ad entrambi era in opposizione Daniele Bernoulli. Condotti i due primi ad un medesimo risultato indefinito contenente due funzioni arbitrarie, pretendea d'Alembert, che il problema richiedesse continuità in tali funzioni, ossia nelle curve iniziali, dalle quali dipendevano; il contrario difendeva Eulero; ambedue poi convenivano, che la trocoide allungata di Taylor non fosse la sola curva atta a rappresentare la figura iniziale d'una corda vibrante. Bernoulli in fine avea assunto a dimostrare, che la curva di Taylor potea soddisfare in ogni caso, e che tutti i calcoli di d'Alembert, e d'Eulero nulla di più aggiungevano alla soluzione di Taylor. La quistione già della massima importanza per la fisica, e per l'acustica intaccava altresì dai fondamenti il nuovo calcolo fecondissimo delle Differenze Parziali; e n'era perciò quanto difficile, altrettanto urgente una finale pronta decisione. Intanto regnava in essa uno straordinario esempio di quel pericoloso conflitto, in cui rimane inviluppata la ragione, allorquando, la geometria, e la fisica non progredendo d'ugual passo, la prima viene in possesso di verità speculative più che non la seconda di fatti, e di mezzi di esperienza. La bella invenzione recente di d'Alembert del calcolo delle Differenze Parziali prometteva nelle funzioni arbitrarie una estensione, e moltiplicità di risultati, che Bernoulli, e lo stesso inventore non poteano credere fisicamente possibili, e di cui Eulero solo osava in quest'occasione rintracciare un primo saggio. Ora La-Grange trattando il problema da fisico peritissimo, e da geometra profondamente metafisico si fa strada attraverso a tutte le difficoltà, e contraddizioni, e arriva felicemente a provare, che la teoria delle corde vibranti d'Eulero è vera, e la migliore di tutte; che la condizione della continuità delle funzioni arbitrarie, e delle curve primitive corrispondenti non è punto necessaria; che la formola della velocità del suono trovata da Newton è conforme ai principj della vera teoria, quantunque la dimostrazione datane da lui sia insufficiente. Nè qui finisce il grandioso lavoro, ma viene seguito da un accurato esame dei fenomeni più interessanti della fisica del suono, e dell'arte musicale. E qui tutto si spiega già con tale verosimiglianza, e qui tale è il consenso della nuova soluzione coll'esperienza, e colla pratica, che nulla più sembra potersi desiderare dal canto della teoria. Eppure il nostro Geometra ci annunzia in questa memoria stessa tener egli già in pronto materiali anche per quelle nuove assai più profonde ricerche sullo stesso argomento, colle

quali rifonderà quasi interamente nel prossimo anno sì perfetto trattato.

Era stato condotto in questo primo lavoro a supporre istantaneo il movimento impresso alle molecole dell' aria per la vibrazione dei corpi sonori, e quindi a conchiudere, che la differenza trai suoni gravi, e acuti fosse riposta nel numero dei colpi istantanei, che in pari tempo riceve l' orecchio. Ma l' ingegnoso Giordano Riccati non avea forse ancora osservata l' inesattezza di tale ipotesi, che per altro sì confinava colla vera del movimento minimo naturale delle molecole aeree, che i risultati della prima poteano riguardarsi almen prossimamente conformi a quelli della seconda, come di molti in molti casi rilevanti già era stato accertato; nè Eulero avea inviato a Torino la sua soluzione del problema, in cui tenne conto di tutte tre le dimensioni dell' aria, che La-Grange già consegnava alla Società Filosofica le nuove sue Ricerche, nelle quali lasciando alle molecole aeree il vero movimento insegnava a superare i grandi ostacoli dell' esatta soluzione d' Eulero. Il metodo inoltre, che tenne dapprima, di instituire il calcolo sopra un finito numero indeterminato di particelle dell' aria, e di pesi isolati, e sparsi sulla corda vibrante non avea soddisfatto d' Alembert, e Bernoulli; e il passaggio, che qui si rendea necessario, dal finito all' infinito lasciava un qualche dubbio sull' esattezza dei risultati; quantunque tale pur fosse il fondamento del calcolo stesso infinitesimale da tutti ricevuto. Era questo un nuovo punto di controversia degno degli sforzi di ambe le parti; ma La-Grange riservando a più matura occasione la ricca messe di scoperte, che vi si nascondeano, scansò le pretese difficoltà coll' uso dei mezzi, e dei principj riconosciuti. Ma la nuova soluzione, che seppe ingegnosamente sostituire fu una generale conferma del metodo antecedente. Una nuova illustrazione della teoria delle funzioni arbitrarie, nuovi artifizi d' integrazione, e nuovi usi dei già noti di d' Alembert promuovono in questo secondo lavoro alla più grande perfezione la parte più difficile del calcolo integrale, mentre rendono singolarmente trattabile il problema della propagazione del suono nella vera ipotesi delle onde sferiche dell' aria, e pongono l' Autore in istato di compiere le spiegazioni precedenti dei principali fenomeni dell' Acustica.

Fa maraviglia il vedere, che una serie di ricerche già tanto avanzate in un argomento dei più complicati, che l' esperienza, e 'l calcolo abbia mai osato esplorare, potesse essere succeduta in sì breve intervallo di tempo da un lavoro del nostro giovine Autore, che lo purgasse dalle obbjezioni dei più insigni Geometri, e quelle ancora prevenisse, che in seguito avrebbe fatte un Eulero, e un Giordano Riccati. Ma ben più attonito rimane chiunque legge nello stesso secondo volume della Società di Torino in questo stesso anno ventesimo quinto dell' età di La-Grange quell' idea originale del calcolo delle

Variazioni, e con essa i primi frutti, e i più preziosi materiali del futuro capo d' opera della Meccanica analitica. I problemi famosi sugli Isoperimetri in questa nuova dissertazione emergono risoluti come per incanto da un giuoco di calcolo colla stessa facilità dei problemi di massimo, e minimo ordinarj; frai quali uno ven' ha già proposto da Cramer spettante ai poligoni, in cui spicca singolarmente l' utilità, e l' eleganza del nuovo metodo, e un nuovo incremento importantissimo s' aggiunge al dominio della Cartesiana Geometria analitica. L'eccellente opera d' Eulero sopra le curve dotate di proprietà di massimo, e minimo non solamente viene qui dal nuovo calcolo ridotta a poche pagine, ma riceve altresì compimento in molte parti, nelle quali Eulero stesso aveva ingenuamente confessato di non potere col suo metodo più innanzi progredire. I principj seguiti dal Cav. d' Arcy, da Dan. Bernoulli, da Eulero, e d' Alembert per applicare l' analisi alle più elevate quistioni meccaniche vengono qui a riunirsi nel solo della minima azione, dal quale vedi già qui pullulare facili, e di nuova luce risplendenti i più utili risultati della Meccanica d' Eulero, delle teorie di Clairaut sulla figura della Terra, e di d' Alembert sul moto, e sulla resistenza dei fluidi, e sopra il sistema planetario. Ora sì felice invenzione, e sì vasto piano di calcolo, e di applicazioni già, come notammo, scintillava in quella mente sublime, allorchè dava l' ultima forma all' ordinaria dottrina dei massimi, e dei minimi, anteriorità da non passarsi sotto silenzio in mezzo a tanta copia, varietà, e rapida successione d' inuditi ritrovamenti, onde preparava La-Grange un' epoca novella nella storia delle Matematiche. Nè varrebbe qui il dire che quest' ultime viste, e riduzioni non tutte appariscono nelle ricerche precedenti sulla teoria del suono, e delle corde vibranti, dove avrebbe potuto giovarsene grandemente. Perciocchè in quelle preferì egli di attenersi ai metodi di d' Alembert, e d' Eulero, e volle derivarne nuovo splendore a quella teoria, che formava una gran parte della loro gloria, e nuovi mezzi per conciliarli sopra tutti i punti, e difenderli dalle opposizioni del valente loro avversario Bernoulli, tributo ben degno di tanto Discepolo a due Maestri, che tutto il diritto aveano alla di lui riconoscenza, e tratto altresì esemplarissimo di somma accortezza del futuro Riformatore dell' Analisi, e della Meccanica, il quale non contento di tutte conoscere le vie del vero seguite fino a lui, volle egli ancora esplorarle dappresso, e segnalarvisi prima di pubblicarne i proprj perfezionamenti.

Nel susseguente anno ricomparve in mezzo a' suoi Colleghi con una memoria, cui diede il modesto titolo di soluzione di varj problemi di calcolo Integrale, ma che rinchiude l' analisi di ben sette classi d' equazioni differenziali di tutti gli ordini, e di tutti i gradi promosse a quel segno di esatta, o approssimata integrazione, che non è dato ancora di oltrepassare, analisi alternativamente variata dalle già

prima incominciate applicazioni al movimento dei fluidi, alla teoria delle corde vibranti, alle oscillazioni minime di un sistema qualunque di corpi, e alle forze centrali, e terminata da una nuova teoria delle orbite, e delle reciproche perturbazioni di Giove, e di Saturno.

Nè con sì copiosi saggi delle novelle sue meditazioni analitiche, e meccaniche finisce La-Grange l'anno 1764. Egli ha già colto il più maturo frutto, che mai da quelle stesse prove la scienza potesse ripromettersi. Parlo delle Ricerche sulla Librazione della Luna, e del di lui concorso al premio proposto per questo stesso anno dalla Reale Accademia di Parigi alla migliore soluzione di sì arduo problema. Qui egli abbandona il principio della minima azione, e adotta la prima volta l' Italiano principio delle velocità virtuali sollevandolo dalla leva, dal piano inclinato, e dalla carrucola al possesso della meccanica più sublime. Il qual principio è certamente più ingegnoso del primo, e senza obbligare, come quello a risolvere in certo modo in ciascuna applicazione un altro problema intermedio mette prontamente, e immediatamente alle prese, dirò così, il calcolo coi dati di ciascuna quistione, e adempie mirabilmente il grande oggetto di La-Grange di tutta ridurre la Meccanica ad un sistema unico di puramente analitiche operazioni. A qual nuovo segno abbia egli condotta la sua impresa in questo primo difficile sperimento, quali aggiunte abbia fatte nella teoria della Luna ai metodi, e alle scoperte di d' Alembert, di La-Lande, e di Clairaut, e quai nuovi lumi abbia recati eziandio alle pratiche Astronomiche, lo dice abbastanza l' applauso, e 'l premio, che ne riportò dalla più illustre Società d' Europa.

Con questa, e colle precedenti produzioni si conciliò presto l' ammirazione dello stesso d' Alembert, e d' Eulero, siccome per la sua condotta verso di loro tutta aveane meritata la benevolenza. Quei sommi uomini non tardarono a riconoscere in lui un loro uguale, e nelle di lui scoperte degna materia di proprie meditazioni. „ Il vostro pro„ blema, gli scrisse d' Alembert, sull' integrazione delle equazioni li„ neari a coefficienti variabili mi parve sì bello, che volli cercarne „ anch' io la soluzione, che vi spedisco „. E sopra un' equazione a differenze finite variabili da La-Grange integrata in un caso assai esteso del moto dei fluidi = „ Eccovi, gli scrive, il metodo, onde trovo anch' io „ la vostra formola elegante, del quale non v' invio che un' idea gene„ rale, nulla più occorrendo per un grande Geometra, quale voi sie„ te „. E non essendo pienamente d' accordo con lui sopra alcuni punti di varie applicazioni di questa, e di altre invenzioni di calcolo integrale d'Alembert da semplice collega gli chiede consiglio. „ Mi consolo „ con voi, gli dice in altra lettera, che noi siamo perfettamente d'ac„ cordo intorno al problema delle corde vibranti „. E dopo d' avergli esposti alcuni dubbi, che ancora gli rimaneano = „ Intanto, conchiude, „ desidero ardentemente di conoscere il vostro parere sulle osservazio-

„ ni, che ho l'onore di parteciparvi, e desidero del pari, che cessi „ ogni disparere, che ancora ci divide sopra questo punto. „ Finalmente congratulandosi del premio da lui riportato nel concorso sulla Librazione della Luna = „ Ho letto, Signore, con sommo piacere, e „ con pari profitto il vostro bel lavoro sopra la Librazione della Lu- „ na ben degno del premio, col quale fu coronato. Esso mi suggerì „ varie riflessioni, cui sarebbe troppo lungo tutte narrarvi. Vi dirò „ soltanto circa al problema della Precession degli Equinozj, che è del- „ lo stesso genere, che tutte le soluzioni conosciute finora di questo „ problema hanno un' imperfezione, della quale nissuno mai si è ac- „ corto „. Parla d' Alembert di una condizione dipendente dall' espressione delle forze perturbatrici, che nei metodi anteriori sfuggiva dal calcolo, e di cui La-Grange con un artifizio d' integrazione era riuscito ad assicurarsi.

Eulero non trattava con minore cortesia, e ammirazione il futuro suo successore. Basti rammentare la testimonianza sopra tutte onorevole, che gli diede della sua stima al comparire del calcolo delle variazioni. Fu egli il primo ad applaudire quel nuovo sforzo d' ingegno; ed egli stesso, che tanta parte avea fondata della propria gloria pel corso di quindici anni nella profonda sua opera sugli Isoperimetri, non esitò ad abbracciare i principj, e le applicazioni di questa scoperta analitica, che dovea subentrare alla sua, e metterla fuor d' uso. „ Analytica tua solutio, gli scrivea fin dall' anno 1759, problematis Isoperimetrici continet, ut video, quidquid in hac materia „ desiderari potest, et ego maxime gaudeo hoc argumentum, quod „ fere solus post primos conatus tractaveram, a te potissimum ad summum perfectionis fastigium esse evectum. Rei dignitas me excitavit, ut tuis luminibus adjutus ipse solutionem analyticam conscri- „ pserim, quam autem celare statui, donec ipse tuas meditationes pu- „ blici juris feceris, ne ullam partem gloriae tibi debitae praeri- „ piam „.

Non così giusto, nè così sincero fu il suffragio di Fontaine, e dei PP. Le Seur, e Jaquier intorno a questa invenzione medesima. Fontaine erasi dato vanto nella prima edizione delle sue opere, che dopo la soluzione da lui pubblicata nell' anno 1734 del problema delle Tautocrone nessun' altra migliore, nè più estesa aveano saputo produrne i Geometri. La-Grange un anno dopo negli Atti di Berlino mostrò vana la di lui pretensione d' aver esaurito l' argomento, o le forze dell' analisi per trattarlo. Poichè Fontaine essendosi limitato a cercare le Tautocrone in date ipotesi di forze acceleratrici, La-Grange dimostrò il bisogno di considerare il problema inverso; in oltre additò, e pose in opera i mezzi di discernere, quali ipotesi di forze acceleratrici ammettono il tautocronismo. Ora Fontaine, quantunque ancora molto gli restasse del proprio dopo questa perdita dal

lato delle Tautocrone, pure due anni dopo volle tentare di rifarsene con un' aggiunta al suo metodo per la ricerca dei massimi, e minimi asserendo, che La-Grange erasi perduto nella nuova strada, che avea voluto battere col calcolo delle variazioni senza ben conoscerla.

I PP. Le Seur, e Jaquier aveano copiato nelle memorie d'Eulero il metodo delle variazioni, e l' aveano inserito nel loro trattato di calcolo integrale senza nominarne l' inventore, e attribuendo ad Eulero tutta la gloria dell'importante applicazione del principio della minima azione.

Più ragionevole infine, e più moderato contegno adoprò in seguito il Cav. de-Borda discorde anch' egli da La-Grange, e da Eulero sopra le equazioni determinate spettanti ai punti estremi delle curve di massimo, e di minimo. Fece egli bensì osservare essere con lui nello stesso dubbio altri geometri indicando fra questi appunto Fontaine; ma trattò la quistione con tutto il riguardo impiegando egli stesso il metodo, e l'algoritmo delle variazioni. E quantunque egli giugnesse a risultati in parte non identici con quelli di La-Grange, fu ben lontano dal pronunziare le conclusioni di Fontaine.

La-Grange trattò dal suo canto colla più grande moderazione i suoi avversarj. Lodò il trattato dei PP. Le Seur, e Jaquier, allorchè espose alla Società di Torino quel loro [illegible]uto, e si contentò di notificare così a questi, come a Fontaine [illegible] testimonianze d'Eulero stesso i diritti, che non divideva con alcuno, sopra l' invenzione del calcolo delle variazioni, e sopra la generale applicazione del principio della minima azione. Rivolgendosi poscia ai dubbj proposti dal Cav. de-Borda rispose con una particolare dissertazione, in cui non solamente sciolse la quistione delle direzioni estreme della Brachistocrona già prima da lui assegnate, e contraddette da de-Borda; ma diede altresì l'ultima mano generale al nuovo metodo relativamente agli integrali definiti, e ai limiti estremi delle curve. Si osserva così in questo, come in tutti gli altri simili incontri essere stata costante pratica di La-Grange di non mai legarsi ai soli punti controversi in ciascuna quistione particolare, alle sole considerazioni altrui, nè ai soli mezzi, coi quali era stata in addietro esaminata, ma di trattarne prima il soggetto in tutta la possibile generalità, e di appropriarselo. Per tal modo mentre non gli potea sfuggire la particolare decisione, che per lui si voleva, metteasi in istato di pronunziarla con tutte le riprove migliori, e col corredo di altre verità nuove, e interessanti, che i soli oggetti isolati della quistione, e i soli punti di vista, sotto i quali era stata riguardata, non avrebbero lasciato scoprire.

Ma siamo trascorsi, o Signori, sulla carriera di La-Grange fino all'anno 1767 senza prima notare l'epoca dell'anno antecedente tanto memorabile nella storia di lui non meno, che in quella della moderna Geometria, voglio dire l' epoca della di lui partenza dall' Italia per

andare ad assumere la carica di Direttore della facoltà Matematica della Reale Accademia di Berlino lasciata vacante da Eulero di ritorno a Pietroburgo. Cassini nell'anno 1666 avea calcolate quelle tavole dei Satelliti di Giove, per le quali divenne l'ammirazione di tutti gli Astronomi del suo tempo: e Luigi XIV. lo volle allora presso di se in seno all'Accademia delle Scienze, che appunto nell'anno di quell'insigne lavoro avea fondata. Un secolo dopo ecco un nuovo calcolo immenso di La-Grange sopra le ineguaglianze dei Satelliti stessi premiato da quella stessa Accademia, ed ecco nel tempo stesso La-Grange onorato da Federico di quell'alta distinzione, che pel titolo medesimo avea Cassini ricevuto da Luigi XIV. Incontro singolare di scoperte, e di premj, d'ingegni maravigliosi, e di Re fortunati, che costituisce il più glorioso diritto dell'Italia sui progressi della Meccanica Celeste, e uno dei più gloriosi avvenimenti così della storia del grande Federico, come della vita del novello Direttore da lui dato alla sua Accademia.

Fin qui La-Grange fu quasi interamente occupato nell' arduo assunto di sottomettere al calcolo la scienza dell' equilibrio, e del moto; e le ricerche di pura analisi, e di geometria non furono per lui che oggetti secondarj, sui quali non si trattenne per lo più, se non quanto lo richiedeano i particolari bisogni di quello scopo principale. Facile perciò è stato finora il seguire i di lui passi, e tener sott' occhio la serie, e l' ordine delle traccie luminose, che segnò rapidamente sul suo cammino. Ma già a quest' ora portò egli tant' oltre la sua impresa, che nè potremo mirarlo così dappresso, nè collo stesso ordine tener dietro a lui costretto a dividere l' opera sua in mille parti, e sopra nuovi oggetti, che si vanno sempre più moltiplicando. I noti mezzi del calcolo, e quelli, comechè innumerevoli, che seppe aggiugnere, cominciano trovarsi di nuovo insufficienti al sublime intento. Già sommo geometra adunque, e calcolatore in ciascun incontro particolare delle sue fisiche, e intellettuali investigazioni precedenti, forz'è, che lo divenga per professione, e rivolga a questa parte più lunghe meditazioni. Infatti nei tre anni susseguenti fa dono alle Accademie di Berlino, e di Torino di sei dissertazioni sulla risoluzione delle equazioni determinate, e indeterminate numeriche, e letterali.

Da Fermat sino ad Eulero pochi, e deboli sforzi avean fatto i moderni nella quanto bella, altrettanto difficile analisi di Diofanto. Des-Cartes avea rivolto l'attenzione dei dotti alla Geometria analitica, e alla teoria delle equazioni determinate. La-Grange in questo nuovo periodo or ripigliando i problemi di Fermat non tentati ancora, or partendo di là, ove s'arresta Eulero, comincia anche in questa parte a riempiere grandi lacune. E nel tempo stesso le profonde di lui investigazioni sulla teoria delle equazioni numeriche, e letterali determinate lasciano del pari lungo spazio addietro quanto con generale

impegno fu in essa inventato sino a quest' epoca. A tutti son noti gli usi continui, e indispensabili di queste due parti dell' algebra in tutte le ricerche d'ogni genere, i vincoli, che le congiungono da molti lati col calcolo integrale, e le originali invenzioni, di cui La-Grange le ha arricchite, corrono per le mani di tutti, perchè io ridica l' inestimabile servigio, che in esse egli ha reso a tutte le matematiche, e mi trattenga a descrivere la felice applicazione delle frazioni continue, le nuove curiose proprietà dei numeri, e delle funzioni, i criterj per distinguere le radici reali, e immaginarie, le positive, e negative, le trasformazioni per trovarne i limiti, le formole d' eliminazione, le eleganti nuove serie d'approssimazione per le equazioni letterali, i criterj della convergenza loro, le espressioni generali approssimanti non solamente di tutte le radici, ma altresì di una funzione qualunque delle medesime, e non solamente delle equazioni algebraiche, ma ancora delle trascendenti, e altre mille verità, e metodi nuovi, e preziosissimi, dei quali fregiò egli in sì breve tempo entrambe quelle collezioni Accademiche.

Fu osservato da taluno, che La-Grange nella teoria delle equazioni determinate era stato preceduto da Waring nell' anno 1762. Ma egli stesso rispose in seguito a siffatta obbjezione dichiarando primieramente, che a lui non era nota l' opera Inglese nell' epoca delle sue ricerche analoghe, e mostrando in secondo luogo, quanto erano lontane le poche isolate speculazioni di Waring dal poter costituire un corpo perfetto di dottrina delle equazioni, quale risultava dalle sue memorie. La gente ricca non ruba, disse Fontenelle a difesa di Leibnitz in una lite simile; e quanto non lo era già La-Grange nell' epoca, di cui si tratta?

Ma questo doppio inudito avanzamento dell' algebra non fu il solo lavoro dello stesso genere, cui desse mano nel triennio, che andiamo percorrendo. Inviò egli altresì alla R. Società di Torino quell' ingegnosa memoria, che rinchiude il fondamento della teoria delle trascendenti Ellittiche, in cui sciolse il curioso paradosso delle molte equazioni differenziali di prim' ordine a variabili separate, e termini simmetrici, le quali ammettono esatta integrazione algebrica, sebbene ciascun termine loro non sia integrabile che per serie, o per funzioni trascendenti, lavoro anche questo grandemente apprezzato da Eulero, che lo volle sviluppare, e coltivar di nuovo egli stesso.

Così porgeva La-Grange nuova particolare giustificazione all' Accademia di Berlino del posto, che in essa era venuto ad occupare, e riparo alla patria del suo allontanamento, mentre serviva nel tempo stesso al suo piano Fisico-Matematico. Imperciocchè nemmeno in questo intervallo di sì profonde, e variate speculazioni analitiche lasciò egli priva dell' opera sua la prediletta Meccanica: ma ben quattro altre memorie le consacrò di misto argomento. Nella prima delle quali pre-

sentò un' analisi semplice, e compita del problema difficile delle lame elastiche ricurve, e utili, e nuovi insegnamenti per la costruzione degli oriuoli; e nella seconda col suo metodo delle serie di risolvere le equazioni letterali liberò l' Astronomia pratica da molte gravi difficoltà nel calcolo degli elementi delle orbite dei pianeti. Nelle altre due trattò l' importante problema del movimento di un corpo attratto a due centri fissi sottraendolo alla limitazione della sola ragione inversa dei quadrati delle distanze nelle forze acceleratrici, e della trajettoria a semplice curvatura, e molte spianando delle gravissime difficoltà di calcolo, che ancora lo ingombravano; e mirando secondo il suo costume più lungi, che l' argomento non richiedea, vi lasciò sparsi i germi delle sue ricerche posteriori sulla teoria della Luna.

Verso quest' epoca Fontaine volle tornare la seconda volta alle prese con La-Grange intorno al problema delle Tautocrone con espressioni anche meno obbliganti delle prime. Aveva egli forse preso ardimento a questa nuova ostilità dalla citata memoria di de-Borda, e da un' altra, che d'Alembert avea pubblicato per giustificare, quanto fosse possibile, questo suo Collega senza per altro nulla togliere al merito delle viste più generali del Direttore dell' Accademia di Berlino. La-Grange si credette questa volta in dovere di trarre d' inganno il suo avversario; e gli contrappose una memoria universale sopra il medesimo argomento, nella quale Fontaine potè riconoscere pienamente la superiorità di lui, e l' errore delle proprie pretensioni. È da notarsi soprattutto in questa decisiva memoria il bell' uso, che fa la prima volta La-Grange della variazione delle costanti arbitrarie, colla quale tanto si distinse in appresso. Non poteva esser diverso l' esito della nuova provocazione di Fontaine contro l' Autore del calcolo delle variazioni, che sì pronto avea, e famigliare il segreto principale del contrastato problema. Tale è il frutto delle controversie degli uomini veramente dotti; e sarebbe desiderabile, disse in somigliante occasione il giudizioso Le-Clerc, che più frequenti fossero insorte siffatte contese sopra tutte le invenzioni dei secoli passati.

Nè cessava tuttavia l' inesausta vena di La-Grange di fecondare l' analisi di Diofanto, e quella delle equazioni determinate. Ridusse egli a compimento in altra memoria col mezzo di alcune proprietà dei numeri scoperte da Eulero la soluzione di un problema difficile di Bachet de Meziriac. Il qual uso felice dei proprj mezzi accolse Eulero con soddisfazione; e non isdegnò di dare egli stesso poco dopo un' ampia esposizione anche di questo trovato del suo degno competitore. In altre due memorie indirizzò La Grange i suoi sforzi al grande oggetto della generale esatta soluzione delle equazioni algebraiche determinate, che analizzate avea con tanta gloria dal canto della soluzione approssimata. Nel che quanto utili siano riuscite queste nuove di lui ricerche, ne abbiamo prova, ed esempio luminoso nell' opera eccellente

del Cavaliere Ruffini, cui fu riservata la gloria di toccare in questa parte l' ultima meta.

Mentre i dotti leggevano attoniti tante sublimi produzioni negli Atti di Berlino, la R. Accademia di Francia divideva fra La-Grange, ed Eulero uno dei più gloriosi premj, che mai avesse proposti. Il quesito era di perfezionare i metodi, sui quali era fondata la teoria della Luna, stabilire le equazioni di questo Satellite, e soprattutto di render ragione del movimento secolare di esso. La Grange avea già in pronto, come notammo poc' anzi, grandi mezzi per questo lavoro; e decorato d' altronde del premio del problema della Librazione, era degno di lui, e giusto insieme, che si prestasse al voto della stessa Accademia, e al bisogno della Meccanica celeste anche nell' esame importante delle altre affezioni dinamiche dello stesso Satellite. Premettendo per tanto il principio = *Juvat integros accedere fontes*, che ben poteva essere la divisa di tutte le sue opere, incomincia dal fare del soggetto fisico proposto un soggetto di Meccanica razionale ripigliando il problema dei tre corpi indipendentemente dal particolare sistema celeste, di cui si tratta. Nel che se mirabile è la destrezza, che spiega di nuovo nelle moltiplici combinazioni degli elementi dei tre corpi, e nell' uso de' suoi tanti artifizj antecedenti d' eliminazione, e d' integrazione delle equazioni complicatissime di questo finora disperato problema; è poi incredibile la facilità, e l' evidenza, colla quale viene in mezzo a cotanta preparazione di calcolo raccogliendo le circostanze, e particolari proprietà dall' Accademia contemplate; e diresti piuttosto non il calcolo aver qui servito a scoprire le cercate verità, ma queste aver quello preceduto, e averne dettata la più opportuna forma alla consapevole sua penna. Così meritò egli di trovarsi a livello del veterano Eulero, cui, tranne Daniele Bernoulli, aveano fino a questo punto ceduto la palma tutti i Geometri di prim' ordine.

Fu in quest' anno medesimo, che La-Grange pubblicò quella nuova specie di calcolo relativo alla differenziazione, e integrazione tratta dall' analogia osservata da Leibnitz tra l' algoritmo differenziale, e quello delle potenze, e dalla regola d' integrazione di Giovanni Bernoulli fondata sopra quell' analogia medesima. Quantunque però in questa memoria chiari apparissero i principj della nuova teoria delle Funzioni Derivate; ed egli stesso già prevedesse, e facesse osservare la fecondità di questo metodo, e la grande influenza di esso in tutta l' analisi superiore; si limitò tuttavia allora a dedurne semplicemente quelle sue eleganti, e utilissime formole per l' interpolazione delle serie. Ma sembrerà strano, che in tanta discussione, che allora pendeva indecisa intorno alla vera metafisica del calcolo Differenziale, sfuggisse ai Geometri sì opportuno mezzo, che in questo scritto ne veniva loro somministrato, e sì manifesto incominciamento delle verità, delle quali andavano in traccia. Questa singolare disattenzione però, o non curan-

za pel nuovo calcolo, io son d' avviso, che attribuir si debba a quella certa ostinazione, o astrazione abituale, che suole irretire l' umano intelletto, allorquando sotto la scorta di dati principj si è aperto un nuovo sentiero da qualche lato delle scienze speculative, e lungo tratto vi ha percorso con vantaggi anche soltanto apparenti, o senza perdere la speranza di conseguire un grande scopo, ostinazione, o alienazione invincibile, per la quale osserviamo i coltivatori delle scienze per lo più progredire nell' indagine di verità rimote piuttosto che retrocedendo instituir nuovo, e più maturo esame sui principj delle cose, e meglio esplorare i punti, dai quali conveniva prender le mosse. I Geometri del Secolo XVII; e dei precedenti abituati a non convincere, e a non esser convinti, che per mezzo del principio di contraddizione, educati nell' uso dei metodi d' Archimede, e d' Euclide, e debitori a quelli del vanto di molte scoperte quanta resistenza non opposero, allorquando Galileo, e Cavalieri, Des-Cartes, e Newton, e Leibnitz li richiamarono ai metodi della ragione sufficiente, e al calcolo infinitesimale? Ora quella stessa difficoltà, e renitenza, colla quale cambiarono in quell' epoca direzione, e linguaggio, dovea fermamente attaccarveli, e render vana sulle prime l' impresa di chiunque tentasse di farli una seconda volta, e così presto retrocedere. Dond' è avvenuto, che le oscurità, e contraddizioni del calcolo infinitesimale dal maggior numero furono disprezzate; e i pochi, che ne sentirono l' importanza, pretesero di dissiparle per mezzo del calcolo stesso infinitesimale. Per la qual cosa non è maraviglia, che La-Grange, segnate quelle prime traccie dell' aurea teoria delle Funzioni-Analitiche, per molti anni più non ne parlasse. Vedea ben egli quanta opposizione avrebbe trovato nell' amor proprio di molti potenti, e nel pregiudizio di molti altri una riforma, che dovea sottrarre il calcolo Differenziale alla tanto vantata metafisica dell' Infinito, risolverne tutto il segreto in un semplice particolare algoritmo di convenzione, e accomunarlo agli altri metodi ordinarj di calcolo. Memore pertanto dell' esempio dato da Archimede in quell' indirizzo delle sue scoperte geometriche all' amico Dositeo volle prima di far valere i proprj principj sopra il calcolo differenziale tenere il savio, e generoso partito di starsene lungamente spettatore dell' effetto, che da se stessi avrebbero prodotto, e dell' esito di molti tentativi, intorno ai quali erano per tale oggetto occupati alcuni Geometri distinti. Della quale accortezza, e prevedimento di La-Grange oltre agli indizj, che ne porge la memoria stessa, di che parliamo, oltre a quello, che abbiam potuto notare prima d' ora, della singolare prerogativa di quel maraviglioso ingegno di preparare egli stesso in tutti i più particolari primitivi suoi ritrovamenti ogni più utile, e generale applicazione, che derivar ne potesse, manifesta prova ne abbiamo ancora in quel premio, che in seguito propose l' Accademia stessa, che egli diriggeva, a chi darebbe una teoria chiara, e

precisa dell' infinito matematico. Soltanto ventisett' anni dopo ruppe egli il silenzio, e riprodusse il metodo delle Funzioni con tutto il corredo di storici documenti, di profonde riflessioni metafisiche, e di generali applicazioni, che gli dà il diritto di subentrare nel posto del calcolo infinitesimale.

Questo è l' ultimo dei più rimoti confini, che segnò La-Grange nella scienza, e nell' arte del calcolo senza mai abbandonare la Meccanica analitica, e celeste, anzi per sola occasione manifestamente di questo suo primario assunto. Ma fu l' opera di soli vent' anni di gioventù, e della sola metà del viver suo questo apparato di scoperte, che già lo uguagliavano ai primi Geometri, e Fisici del suo tempo, e che doveano tuttavia essere a lui stesso soggetto di ben altri 42. anni di studio incessante. Ora chi potrebbe tutte descrivere le stupende produzioni, che accumulò in sì lungo periodo negli Atti di Berlino, e di Torino, in quelli dell' Accademia, e dell' Istituto di Francia, e delle Scuole Normale, e Politecnica, e nelle sue opere separate, egli, che già avea stabilito il principio universale, e le equazioni fondamentali della Meccanica, egli, che si era fatta propria l' analisi di Diofanto, e la dottrina delle equazioni, egli inventore del calcolo delle variazioni, e del metodo generale dei massimi, e minimi, egli che già tenea in mano la vera chiave del calcolo infinitesimale, che del calcolo integrale tant' oltre avea dilatati i ristretti confini, egli già tanto addestrato negli usi più difficili di sì efficaci strumenti, egli, cui già dovea tante nobilissime conquiste la Scienza del calcolo, la Fisica, e l' Astronomia? Ma trattasi dell' ultimo abbellimento del grandioso edifizio, di cui abbiamo potuto osservare non già il solo disegno, ma in gran parte l' effettiva esecuzione: onde non è più d' uopo, che con tutto l' ordine precedente, nè così minutamente prosiegua la mia narrazione, la quale già pur troppo ha oltrepassati i limiti alla presente funzione prescritti.

Nel puro calcolo La-Grange ebbe ancora lungamente a cuore l' analisi di Diofanto. La sola compiuta soluzione dei problemi indeterminati di primo grado, che avea trovata innanzi, comechè opera da sovrano maestro, per lui non bastava. Vi si applicò adunque di nuovo in varie occasioni affrontando difficoltà sempre maggiori. E quante, e quanto preziose scoperte abbia aggiunte alle proprie antecedenti, e alle contemporanee d' Eulero, ne fecero chiara fede gli illustri geometri Le-Gendre, e Gauss nelle insigni opere loro sullo stesso soggetto. La teoria dei numeri fino all' epoca, di cui si tratta, era pressochè nel medesimo stato, in cui trovavasi la Geometria prima di Des-Cartes. Era anch' essa destituita di un linguaggio suo proprio, e di mezzi diretti d' analisi generale: ogni verità nuova o era frutto di rimota induzione particolare, o di lungo circuito penoso di sintetiche posizioni, o infine di fortunata combinazione di poche proprietà affini

già conosciute. Gauss ebbe il felice intento di creare un algoritmo, e un linguaggio assai proprio di questa teoria, e di osservare un vincolo, che ne congiunge le parti principali; e potè quindi farvi nuovi passi della più grande importanza. Ma il sincero geometra Alemanno rese giustizia a La-Grange tutti annoverando i copiosi materiali, che con Eulero, e Le-Gendre gli avea preparati, e lasciandogli tutto intero l' onore d' aver saputo colla sola forza del proprio ingegno penetrare tant' oltre in sì spinoso sentiero.

Altre memorie eccellenti, e piene di belle, e utilissime verità, e metodi nuovi consegnò agli Atti dell' Accademia di Berlino sopra l' integrazione delle trascendenti Ellittiche, e delle equazioni a differenze parziali finite, e infinitesime, sulle serie doppie ricorrenti, e sull' uso del calcolo delle differenze finite nella dottrina al pari d' ogn' altra sottile delle probabilità, applicazione quanto ingegnosa, altrettanto importante, o si consideri la classe numerosa di problemi per essa risoluti, o l' artifizio unico, che tutti gli abbraccia, e con incredibile facilità li sottopone al calcolo, applicazione, di cui già, come osservammo, avea l' Autore fin dalla prima gioventù concepita l' idea, e promessa l' esecuzione.

Le soluzioni particolari delle equazioni differenziali, che furono, come abbiam veduto, l' arma vittoriosa nella celebre sfida delle tautocrone, erano state lungo tempo un paradosso inestricabile pei Geometri più valenti. La-Grange trasse con due dissertazioni in piena luce il vincolo genuino, che alle ordinarie equazioni integrali le tiene unite; e mostrò la ricca messe di problemi gravissimi, che in esse trovano spedito, e diretto scioglimento. I vantaggi, e gl' artifizj di questo ramo di calcolo hanno grande somiglianza con quelli del calcolo delle variazioni. Nel primo si fanno variare le quantità costanti, nel secondo ad una legge di variazione delle quantità stesse variabili già prescritta, o supposta se ne accoppia, o sostituisce un' altra differente dalla prima. Per l' uno, e per l' altro di questi due modi di operare sulle quantità, e sulle equazioni si sottopongono i risultati ad un cambiamento anticipato non solamente di grandezza, ma di forma eziandio, e si chiamano a parte del giuoco analitico di un medesimo sistema di equazioni circostanze, e ramificazioni lontanissime di problemi principali della più alta importanza. Giovanni Bernoulli, che fu preso da tanta maraviglia, quando Leibnitz gli comunicò quel primo suo artifizio della differenziazione *de curva in curvam*, che detto avrebbe se avesse potuto prevedere il posto, che per opera di La-Grange venne esso ad occupare in questo doppio compendio incredibile di calcolo, in quest' arte, che io chiamerei della trasformazione dei problemi; che detto avrebbe, se tutta la viva luce metafisica avesse potuto comprendere, e tutte le ricchezze geometriche, di cui ricomparve adorno in queste dissertazioni?

Nel resto della sua vita l'infaticabile La-Grange fu più intento a coltivare dappresso, e direttamente la Meccanica razionale, e a far camminare del pari con essa la Meccanica celeste. Per la prima non bastava l'aver sottoposta medianti i principj della minima azione, e delle velocità virtuali l'intera scienza dell'equilibrio, e del moto a due sole equazioni, e l'avervi messo a cimento con buon successo ipotesi di forze, e di meccanici sistemi non tentati ancora: e molto meno bastava per la seconda la serie quantunque numerosa di felici sperimenti già instituiti sul problema delle corde vibranti, sopra quello della teoria della Luna, e dei Satelliti di Giove, e sopra quanti altri esercitarono in addietro con maggior lode l'incomparabile perizia, e sagacità di lui nelle fisiche investigazioni. Difficile, e limitato tuttavia sarebbe stato l'uso di quelle universali equazioni, se egli stesso più lunga opera non avesse prestata a vincere ancora grandi ostacoli di calcolo, a classificarne le applicazioni, a preparare opportune regole semplici, e costanti per le grandi modificazioni, che richiederebbe ciascuna ipotesi sull'assoluta, e relativa situazione dei corpi celesti, sulla figura, e costituzione di ciascuno, sulle forze acceleratrici, e perturbatrici, sulle trajettorje loro, e sui mezzi di eseguire, di apprezzare, e di impiegare le osservazioni, e sopra infiniti altri oggetti, e circostanze complicatissime. Non v'ha sistema intellettuale in oltre quanto si voglia perfetto, e da quante si vogliano felici applicazioni confermato, al quale o le imperfezioni della pratica non domandino nuovi lumi, e nuovi soccorsi, o i progressi medesimi della fisica non porgano occasione di nuovi perfezionamenti, e nuovi non preveduti fenomeni non richieggano novelle ardue prove inaspettate. Questo è il mare senza sponde, nel quale La-Grange prosiegue gloriosamente le sue scoperte massime nei rimanenti 15 anni della sua dimora in Berlino.

De-Luc, e Lambert procurano alla fisica nuovi lumi sperimentali intorno alla natura dell'aria. Egli ne fa subito la più utile applicazione deducendone preziose formole per la costruzione delle tavole delle rifrazioni astronomiche, e la vera stima dei metodi di Sympson, di Bradley, e di Mayer sopra questo soggetto tanto importante.

Resta indeciso fra Dan. Bernoulli, e Krafft, d'Alembert, e Bossut, quale sia la giusta misura dell'urto di una vena fluida contro un piano. La-Grange con nuova vista originale, e col suo efficace istrumento del calcolo penetra attraverso alle contraddizioni dell'esperienza: e i Michelotti, i Lorgna, i Zuliani, instituiti più esatti sperimenti, fanno plauso al di lui risultato. Correva quell'anno, in cui la Società di Torino dava solenne testimonianza del valore, e dei gloriosi servigi di La-Grange, e ne ricevea dal Re Vittorio Amedeo III. il tratto più segnalato dell'alta sua soddisfazione, e munificenza; ed era allora appunto l'Idraulica il soggetto delle speciali cure di quella Società. E questo fu l'opportuno, e ben degno tributo, col quale La-

Grange fregiò anche il primo Volume degli Atti della patria Accademia Reale.

In tutti i casi di libera scelta specialmente nelle Arti dee il perito ad imitazione della natura mirar sempre a un massimo di utilità, di sicurezza, e di convenienza. La-Grange mostrando un nuovo esempio luminoso del modo di procedere in questi casi, e dei mezzi da impiegarsi rende col suo calcolo delle variazioni alla Statica, e all' Architettura un servigio utilissimo nel problema della restremazione delle colonne.

Nell' oriuolo s' impiega una specie, e un giuoco di forze difficile a calcolarsi. La Grange alla citata memoria sugli elastri un' altra ne aggiunge sullo scappamento, nella quale sembra abbia voluto lasciarci un particolare ammaestramento sul modo di trarre ai più minuti, e complicati bisogni della pratica le conclusioni de' vittoriosi risultati generali della sua meccanica senza defraudare il limitato artista della necessaria semplicità, e precisione.

L' arte medesima di osservare, e sperimentare viene da lui mirabilmente illustrata in questo periodo. Il metodo empirico dei pratici di prendere il risultato medio sopra molti discordi dati da una serie d' osservazioni, e sperienze di uno stesso fenomeno può talvolta in vece di compensare gli errori aumentarli, e può tuttavia essere sorgente di esattezza maggiore di quella, che promette per se stesso. In una memoria sopra questo rilevante argomento diede La-Grange una prova a nissun' altra inferiore della sua industria analitica, e lasciò un eccellente trattato della parte più utile, e più sottile della critica sperimentale.

La varia figura dei corpi era per l' ipotesi dell' attrazione Newtoniana uno degli elementi, che più tenevano occupati i Geometri, e gli Astronomi più valenti, e tale era parimente per la ricerca del movimento misto prodotto da impulso primitivo eccentrico. Ecco in tre dissertazioni una sopra il movimento rotatorio di un corpo libero di figura qualunque non animato da forze acceleratrici, le altre due sull' attrazione delle sferoidi ellittiche soggettati da La-Grange interamente al calcolo questi problemi con tale sagacità, e buon esito, che Eulero stesso ne attestò la più grande ammirazione tanto più onorevole per La-Grange, dacchè era questo il soggetto dei più gloriosi sforzi dei Sympson, dei Clairaut, e dei Maclaurin. Queste tre memorie e pel numero, e per la complicazione sorprendente degli oggetti, che abbracciano, e per le enormi difficoltà di calcolo superate, e per la moltitudine, e l' eccellenza delle meccaniche proprietà discoperte, e per l' eleganza, e semplicità maravigliosa dei ragionamenti, e dei risultati bastano sole a comprovare il sommo grado di perfezione, cui venne dall' Autore promossa la Meccanica sublime. Ai nuovi mezzi, e alle verità nuove, che in esse avea radunato, fu egli debitore in seguito

della quarta corona, che riportò nel concorso dell' Accademia di Parigi sopra l' equazione secolare della Luna.

Avea l' Accademia di Berlino appena premiate due memorie sul problema da lei proposto di determinare le orbite delle Comete col mezzo di tre sole osservazioni, che tre altre ne ricevette dal suo Direttore, colle quali svelando egli nell'argomento stesso a vantaggio della teoria, e della pratica Astronomica più di quanto l' Accademia avea richiesto, preparò in oltre i materiali di quella nuova dissertazione, che gli meritò poco dopo il quinto premio dell' Accademia di Parigi sulle perturbazioni delle Comete.

Nulla sembrava mancare generalmente alla teoria fondamentale del moto dei fluidi dopo le eccellenti dissertazioni di d' Alembert premiate dall' Accademia stessa. Ma La-Grange non dovea contentarsi della parziale opera sua, che in questa parte avea, come accennammo, contribuita in varie occasioni, nè dovea permettere, che l' Idrodinamica fosse una scienza per verun titolo separata dalla sua Dinamica universale. In oltre le equazioni dapprima intrattabili di questa teoria non potevano più sottrarsi almeno in molti casi importanti agli artifizj, che frattanto egli avea immaginati, e a quelli, che la matura di lui sagacità, e perizia avrebbe saputo nuovamente apprestare. Diresse egli adunque a questo argomento nuove investigazioni; e il riformatore della teoria delle corde vibranti fu anche in questa simile impresa uguale a se stesso, e assegnò anche all' Idrodinamica il suo vero posto immutabile nella serie dei grandi materiali della futura Meccanica analitica.

Si crederebbe ormai giunta al suo termine la presente orazione, o almeno a tal punto della carriera del nostro Geometra, ove più non restasse che da raccogliere nei progressi susseguenti delle scienze Fisico-Matematiche la parte dovuta ai lumi, e alle aperture, che egli ne somministrò. Perciocchè se dei Matematici ritrovamenti questa è l' indole comune, e questo l' esito, e 'l vantaggio ordinario di procacciar plauso ai loro Autori non meno per le verità, che in se stessi presentano, che per quelle, cui danno in progresso facile indizio, e necessario nascimento; singolarmente propria dee riputarsi questa prerogativa delle opere di La-Grange, che tanta generalità di risultati comprendono, e tante nuove sorgenti dischiudono di nuova luce nelle più rimote parti della Scienza. E certamente di non poca messe sperar potrei di arricchire da questo lato il mio discorso considerando l' emulazione pubblica, e privata per questi studi, la moltitudine di nobilissimi ingegni, e la copia di opere pregiatissime, che tenner dietro rapidamente ai voli sublimi del Direttore dell' Accademia di Berlino. Ma ben lontano ancora La-Grange dal ridursi al già tanto meritato riposo di sedere spettatore dell' opera altrui nell' applicazione delle feconde sue scoperte, tutti seguita a coglierne egli stesso i ma-

turi frutti; e anzichè far ricerca altrove di lui, appena è dato di seguirlo tuttora nelle nuove imprese, onde procede a dare egli stesso l' ultimo compimento alla sua gloria. Già additai i grandi mezzi, che avea immaginati fin da' suoi primi anni per la meccanica specialmente dei Pianeti, e i premj, che ne ottenne, e le immense aggiunte, che vi fece ne' cinque vittoriosi giudizj della R. Accademia di Parigi. Ora questi stessi già sì perfetti lavori ha egli coraggio, e forza di ricondurre alle fonti primitive, di rifonderli, e riprodurli in gran parte nei quattro anni susseguenti, che nella vita di lui ponno veramente dirsi il periodo della danza dei Pianeti. Il problema generale però delle reciproche loro perturbazioni, e quello massime delle variazioni secolari, pel quale già avea quindici anni prima vinto il premio sulle ineguaglianze dei Satelliti di Giove, sono la principale degna prova novella del suo valore. Qui le difficoltà non erano nè per numero, nè per gravezza inferiori a quelle, che sì gloriosamente avea superate nel problema dell' attrazione delle sferoidi; ma di gran lunga maggiore era l' importanza, e la diramazione di un soggetto, dal quale immediatamente dipende la stabilità, e la vera intima costituzione dell'intero sistema planetario. Del quale con replicati sforzi inuditi d' ingegno, e di perseveranza arrivò egli a porre in sì chiaro lume i fenomeni, e l' influenza loro sulle antiche, e moderne osservazioni, e sopra tutta la scienza degli Astri, e con tant'ordine, e rigore esaminò ad una ad una le alterazioni di ciascun pianeta, e di ciascun suo elemento, a tale apparato imponente di formole generali le ridusse, e di tali saggi, e tali norme le corredò di pratici usi, e applicazioni d' ogni genere, che null' altro sembra aver lasciato ai posteri in sì vasto, e delicato argomento, fuorchè la continuazione, e 'l compimento di particolari deduzioni, e di già divisate approssimazioni, e già sufficienti per tutti i più minuti bisogni dell' Astronomia.

Così alternando le più ardue speculazioni teoriche coi più grandiosi provvedimenti pratici delle Scienze Fisico-Matematiche, e tutti abbracciando a vicenda i fenomeni più astrusi del Cielo, e della Terra fino all' anno 1785, cinquantesimo dell' età sua, si vede ormai in istato di dar corpo alla grand' Opera, oggetto primario de' felici suoi sforzi. Ne pubblica di fatto in quest' anno un primo saggio nella prima parte di una Memoria letta all' Accademia di Berlino, mentre nella seconda riunendo co' suoi metodi anteriori nuovi ritrovamenti sopra tutta la teoria della Luna offre un perfetto modello d' una Meccanica celeste. Frutti di questa nuova generale rivista, e di questo ultimo avvicinamento furono altre molte dissertazioni di vario argomento piene di nuovi preziosissimi raffinamenti dell' ottica, dell' acustica, della dottrina delle probabilità, della pratica Astronomia, della teoria delle serie, e del calcolo integrale, e l' opera in fine della Meccanica Analitica, colla quale coronò questo nuovo periodo di sei anni.

Era accaduta la morte di d' Alembert nell' anno 1783; e quantun-

que nell' Accademia di Parigi tenesse dietro a questo sommo Geometra bella schiera di Candidati illustri atti a ripararne la perdita, tuttavia la celebrità di La-Grange mosse l' Accademia a procurarsene l' acquisto. Ed era ben giusto, che colui, al quale d' Alembert medesimo avea ceduto l'onore di succedere ad Eulero nell' Accademia di Berlino, fosse di lui successore in quella di Parigi. La-Grange avea perduto l' unico suo figlio, e con esso poc' anzi l' amata sua sposa, e il soggiorno di Berlino era divenuto per lui tristo, e doloroso. Cedette perciò agli inviti dell' Accademia Francese, e volentieri accettò di consacrare il resto de' suoi giorni allo splendore di quella Società, cui già tanto dovea della sua rinomanza. Venne dunque a Parigi recando in dono all' Accademia la Meccanica Analitica, la quale da lui incominciata fin dalla più fresca gioventù col calcolo delle variazioni, stabilita ne' suoi principj fin dall' epoca del concorso per la librazione della Luna, sottoposta a generale esame novello dopo sedici anni di continuo perfezionamento, e dopo altri sette di novelle riprove le più decisive riordinata, e compita.

Pare, che il rumore della rivoluzione di Francia avvenuta in questo tempo lo disturbasse dalle solite sue occupazioni; poichè di rado vedesi fatta menzione di lui negli atti scientifici di varj anni susseguenti: e l' Autore dell' articolo inserito nel giornale di Francia all' epoca della di lui morte ci assicurò, che passarono ben due anni, dappoichè la Meccanica era escita in luce, prima che egli si desse nemmen pensiere di guardarla. Come poteva il sensibile, e illuminato La-Grange proseguire tranquillo, e contento ne' suoi studi in mezzo a tanto disordine sociale? Interrogato di sì strano cambiamento egli rispose, che era disgustato di quel genere di combinazioni, e che erasi dato piuttosto allo studio della Chimica, la quale, soggiunse, presentemente è facile a impararsi, perchè s' insegna come l' Algebra. In questo intervallo di rallentamento d' applicazione, nel quale dovea più che mai gravitare sul di lui cuore la rimembranza delle domestiche sventure, s' indusse a scegliere una seconda compagna nella figlia di un antico suo amico, e distinto collega nell' Accademia delle Scienze. Questi soli tratti della privata di lui vita fanno bastante fede di un carattere schietto, e di un cuore adorno delle più pure domestiche, e sociali virtù, le quali furon sempre per testimonianza di tutta l' antichità corredo indivisibile di ben nato animo nelle matematiche discipline lungamente cresciuto, e fortificato.

Calmato il tumulto, e riordinata la pubblica istruzione ritornò egli tosto sulla sua carriera. Nelle Scuole Normale, e Politecnica fu uno dei primarj Professori eletti: nelle più importanti commissioni dell' Accademia, indi dell' Istituto, e dell' Ufficio delle Longitudini presiedette come membro primario, e fu sempre cooperatore indefesso. Ma La-Grange tratto dal grande assunto del superiore perfezionamento del-

la Scienza alla giornaliera incombenza dell' istruzione elementare era quell' insigne architetto, che io dicea dapprima, chiamato a dar ragione, e a far mostra egli stesso dei modelli, dei materiali, d' ogni segreto ingegno, e divisamento de' suoi capi d' opera. Tale di fatto comparve nella presente situazione, e tale si ammirerà dai posteri nella Teoria delle equazioni numeriche, e nelle Lezioni delle Scuole Normale, e Politecnica. Nelle quali tra le infinite illustrazioni d' ogni ramo di calcolo, tra le ricchezze di nuovi metodi, di nuove applicazioni, e semplificazioni, di che ridondano, bello è il vedere La-Grange intento a sviluppare i difetti della metafisica del calcolo Infinitesimale, e sostituirvi quel decisivo metodo delle semplici Funzioni derivate, e a ricercare nel tempo stesso la dimostrazione del principio quanto ogn' altro infinitesimale delle Velocità Virtuali. Potea questo per avventura annoverarsi tra quelle non-verità argutamente notate da Leibnitz, dalle quali di assai belle, e buone verità emergono assai spesso, e felicemente. Ma l' Autore della Meccanica analitica, che già tanto avea nobilitato l' uso di tale principio, non volle nemmen lasciarne la metafisica senza questo sì necessario tributo; e il Polispasto salì per lui nella Meccanica a quel posto distinto, che toccò alla Cicloide nella superiore Geometria. Venne finalmente a distoglierlo da queste elementari speculazioni, e a richiamarlo a nuovo più grave soccorso della Meccanica un' avvenimento, che pose il colmo alla sua gloria.

Poisson uno de' suoi più distinti allievi, già autore di ragguardevoli aggiunte nei trattati dell' insegnamento della Scuola Politecnica avea presentato all' Istituto una memoria, nella quale era ingegnosamente riuscito ad estendere le antiche di lui approssimazioni nel calcolo delle variazioni secolari dei Pianeti al di là delle prime potenze specialmente delle masse, e a dimostrare compiutamente, che anche tali variazioni non ponno non essere periodiche. Deputato La-Grange medesimo a dar giudizio di questo bel lavoro non si limitò già ai soliti confronti, e alle solite verificazioni; ma onorò il valoroso discepolo, e corrispose al voto dell' Istituto con quell' abbondanza, e superiorità del suo fecondo, e prontissimo ingegno, colla quale ventidue anni innanzi accoglieva i primi tentativi altrui intorno a questo medesimo perfezionamento de' suoi calcoli. Eccolo di fatto in questo stesso anno ricomparire all' Istituto con tre dissertazioni, nelle quali un nuovo quadro, e un nuovo laboriosissimo esame di tutto l' argomento ti presenta in quel suo antico metodo della variazione delle costanti la chiave universale del calcolo per tutte le piccole secondarie perturbazioni di qualunque meccanico sistema, e in poche pagine il più perfetto corredo di regole, di formole, e di equazioni necessarie per le applicazioni, e operazioni tutte del calcolo stesso.

Che mai poteasi ancora aspettare dal settagenario La-Grange, o

che potea più mai desiderare egli stesso dopo un esito tanto glorioso di quest' ultima riprova delle sue più sublimi speculazioni. Niente meno, o Signori, che un'opera novella, nella quale non già la seconda, ma bensì la quarta edizione ci darebbe egli stesso della sua Meccanica. La bellezza, e fecondità del maraviglioso compendio analitico poc' anzi operato in tanto estesa parte della meccanica, e tanto conforme all' economia, e al magistero delle forze della natura dovea invitarlo possentemente ad una riforma della prima sua opera: e forse avea dovuto più volte convincersi, che le innumerevoli sue invenzioni, che sparse ancora giaceano negli atti delle Accademie, sopra tutte le parti della Fisica, e dell'Astronomia dopo d'aver contribuito a formare più d'una riputazione non sempre, nè tutta avrebbero ricevuta la dovuta giustizia, e riconoscenza. S' accinse adunque all' enorme impresa, cui nissun'altra uguale fu tentata mai in età sì avanzata. Pubblicò il primo volume della nuova Meccanica, nel quale primeggia fra gli altri perfezionamenti quello del metodo della variazione delle costanti, e più elegante, e mirabilmente ampliata ricompare la teoria delle oscillazioni minime dei corpi, quella massime delle corde vibranti. E già stendea di propria mano il secondo volume compiendo l'anno settantesimo settimo della sua vita: ma col problema delle corde vibranti, col nuovo godimento intellettuale dell' armonia era tornato La-Grange a quel punto, dond' era partito 52 anni innanzi: qui compiva il vasto circolo della sua gloria: qui sciogliér dovea l'ultimo volo questa fenice della moderna geometria.

Questi sono, Uditori, i principali documenti, nei quali durerà immortale la memoria di La-Grange. Resterebbe ora che delle di lui opere riunissi in un sol quadro i tratti più luminosi, e caratteristici, che tutte insieme le distinguono. Io non mancherò del tutto nemmeno a questa parte della mia incombenza, e dirò schiettamente, se non altro, l'impressione, che sopra di me ha fatto questo sommo Maestro.

Pregio nobilissimo primieramente, e grandemente instruttivo delle di lui produzioni sono quei prospetti, che egli poneva in fronte a ciascuna sull' origine, sui progressi, e sullo stato corrente di ciascun ramo della Scienza, che imprendeva a trattare. Sono questi un capo d'opera di erudizione, di eleganza, e di esattezza, e modelli eccellenti per la storia di una scienza qualunque. Perfettamente instrutto delle opere Matematiche antiche, e moderne egli sapea tosto additare le genuine sorgenti, e i veri germi primitivi d' ogni scoperta. E qui l'ordine, e la nitidezza dell' esposizione, e la compiuta serie delle notizie fa tanto più maraviglia, dacchè disordinati, oscuri, e incerti sono per lo più i sottilissimi fili, onde risulta lo sviluppo, e l' incremento delle umane cognizioni. Ma indagatore egli stesso, e inventore sagacissimo, e ammaestrato dalla più lunga esperienza del grado di difficoltà di ciascuna ricerca, della connessione, che aver potea colle cognizioni

contemporanee, e dell' influenza sui progressi posteriori seppe dare perfetta contezza delle fatiche, e del merito altrui, e giudizj ragionati con una critica avveduta, e profonda, della quale ebbe comune il vanto con pochi altri Scrittori. Lasciando lo storico, e tornando all' inventore, chi prima di lui riunì nel tempo stesso in grado più eminente il Geometra, il Calcolatore, e 'l Filosofo? Qual Geometra non conveniva, che fosse, allorchè fra le altre armi strappò di mano ai detrattori della moderna analisi matematica il palladio di quella tanto applaudita soluzione geometrica di Maclaurin del problema dell' attrazione delle sferoidi? Si conceda pure che i nuovi metodi analitici hanno scemata la gloria, che andava congiunta presso gli antichi alla separazione, e combinazione dei dati di molte astruse quistioni; io domanderò, se, tratto che sia in equazione un problema qualunque di qualche momento, v' ha un solo di quelli artifizj, e di quelli sforzi d' ingegno, che tanto ammiriamo nelle opere degli antichi, che il moderno geometra non sia tuttora costretto di porre a cimento per venire all' ultima soluzione, e se i metodi moderni colla tanto maggiore loro generalità non ne hanno reso piuttosto il bisogno più frequente, e l' uso più difficile. Domanderò, che mi si indichino le regole, e le aperture, d' onde La-Grange argomentar potea sì facilmente tante improvvise integrazioni, tante forme nuove di serie, e di funzioni, tante preparazioni inaspettate di calcolo, colle quali fu sempre vittorioso nelle sue imprese. Oltrecchè camminò egli sulla doppia carriera del vero fisico, e del vero intellettuale con passo così uniforme, e sicuro, che mai non si vide nè per moltiplicità di oggetti confuso, nè per incontro di paradossi, e difficoltà qualunque perplesso, o costretto a retrocedere, prerogativa ammirabile, e senza esempio, che ci dà la più solenne prova, che quel sublime ingegno era temprato al rigore della più austera geometria.

I fenomeni, che egli trascelse a riprova delle maravigliose sue invenzioni speculative sono i più complicati, e importanti, e 'l più nobile, e degno oggetto, cui possa aspirare lo studio della natura. Del più frequente, e pressante bisogno erano le particolari, e secondarie ricerche, che non mancò di consacrare all' elementare istruzione, e alle pratiche più minute della Meccanica, dell' Ottica, dell' Astronomia. Le ipotesi, le osservazioni, e i metodi anteriori, che egli prese a rettificare, e illustrare, eran quelli, pei quali maggiore, e più funesto era il pericolo di errare, più difficile il discoprirlo, e porvi riparo. Ma sia che s' innalzasse ad esplorare il tenore, le apparenze, e le cause del movimento de' primarj, e secondarj pianeti, o l' incostante sentiero della luce, o l' immenso, e incerto giro delle comete; o prendesse a tutto disporre il necessario apparato per ben osservare, e calcolare una nuova comparsa, o particolare situazione, o vicin ritorno di qualche astro; sia che tornasse al favorito argomento della generazione del

suono, e dell' armonia, o cercasse la migliore grafica rappresentazione del globo terrestre, o scendesse nelle officine meccaniche a insegnar l' arte di trarre dalle forze d' elasticità, e d' inerzia la misura del tempo, o nel seno delle famiglie a provvedere l' autorità; e l' amor paterno di mezzi di protrarsi utilmente al di là della tomba; dovunque La-Grange si mostra il filosofo più sincero, e 'l geometra più consumato nello studio della natura; e dovunque ne accerta pienamente avere in se riunite le due qualità eminenti ripartite da Condorcet fra Daniele Bernoulli, ed Eulero, somma perizia, e sagacità nell' arte d' interrogare, e d' interpretar la natura, somma perizia, e sagacità nell' arte del calcolo.

Se si considera il numero delle produzioni di questi tre grandi Geometri; Eulero si troverà d'assai superiore agli altri due. Ma se vuolsi por mente al grado di generalità, e di estensione, che abbracciarono nelle opere loro; La-Grange non la cede a nissuno, ed ha nelle Matematiche diritto non meno d' Eulero al vanto dell' universalità. La passione dominante d' Eulero era l' arte del calcolo; e precipuo suo scopo il moltiplicarne le applicazioni, e renderne l' uso comune, e famigliare. Quindi ogni oggetto anche il meno interessante, qualunque ipotesi, qualunque particolar problema era per lui argomento di una nuova memoria. La-Grange di rado pose mano ad argomenti, che altro non gli potessero produrre, che un qualche nuovo artifizio di calcolo. Nelle sue scelte le poche volte, che trattò di puro calcolo, sembra, che mirasse a perfezionarne la metafisica piuttosto, che a moltiplicarne i metodi, e le formole: e se trattavasi di applicazioni alla Fisica, e alla Meccanica, ora si proponea di farne di molte una sola riducendone i principj, le ipotesi, e i ragionamenti, or altro non intendeva, che di dare un esempio importante dell' economia del calcolo, e dell' accordo di questo strumento secondario coll' esperienza, e coll' osservazione, e del giusto grado d' influenza, che gli si debbe attribuire nelle conclusioni naturali. Nel risolvere un problema Eulero or l' affronta dal lato, che primo gli si presenta, quantunque il meno accessibile, or si fa ad esaminarlo sotto tutti gli aspetti; e in ogni caso ti ordisce un quadro imponente, in cui tutto vedi chiaramente descritto ogni più minuto andamento di ciascuna soluzione, e tutte le particolarità, che tra via il calcolo diede occasione di osservare. La-Grange ti porta subito nel pieno della quistione, e tutto riempiendo d' improvvisa luce ti guida prima, che nol desideri, alla più compita, ed elegante soluzione, e il metodo, che adopra la prima volta, e 'l piano, che siegue, tutto nuovo, e interamente a lui dovuto ti par l' opera di un secolo di tentativi, e di raffinamenti. Eulero seppe trovare in se stesso il paziente institutore del principiante, e 'l maestro di color, che sanno; e nell' arte di scrivere gli elementi delle scienze non ebbe forse chi lo uguagliasse. La-Grange avea il difetto, se pur tale può dirsi così utile ne-

cessità, di non potere metter mano a nissun lavoro anche il più semplice nè proprio, nè altrui senza aggiugnervi o nuove illustrazioni metafisiche, o nuovi metodi di calcolo, o nuovi vantaggi di non tentate applicazioni. Siffatti due modi d' ingegno entrambi originali, e preziosissimi pel progresso delle scienze, il primo tutto proprio del placido, e indefesso Geometra di Basilea, il secondo tutto proprio della vivacità del Geometra della Dora, quello necessario nell' epoca d' Eulero, nella quale il metodo analitico, non ostanti le luminose prove del calcolo stesso infinitesimale, non l' avea potuta vincere ancora sopra i metodi antichi, questo veramente degno dello stato, a cui era salita l' analisi nell'epoca di La-Grange, nella quale, diffusa, e assicurata pienamente la moderna istruzione matematica, conveniva porgere ai Dotti nuovo pascolo più maturo, e squisito, queste due forme, dico, d' ingegno costituiscono per mio avviso uno dei singolari caratteri, che più distinguono i due Principi dei geometri moderni.

Non ugualmente vantaggioso per Eulero potrebb' essere il parallelo di quelle vicende della vita, che più dal capriccio, e dall' opinione degli uomini, e dalle casuali combinazioni dipendono. La-Grange fondatore primario dell' Accademia di Torino, successore d' Eulero nell' Accademia di Berlino, di d' Alembert in quella di Parigi, partecipe dei primi onori, e delle più insigni cariche, e commissioni scientifiche del suo tempo fu in tutta la sua vita la delizia, e l' ammirazione de' suoi Colleghi, e di tutti i Dotti. Fu l' amico, e 'l conciliatore dei primi Geometri contemporanei nell' atto stesso, che ne ecclissava la gloria. Fu il desiderio, e l' amore de' più illustri suoi concittadini anche dopo d' aver abbandonata la patria. L' unica controversia piccante, che egli ebbe, quella delle Tautocrone, non fu che occasione per lui dell' acquisto di nuovi titoli nella stima, e nell' amicizia degli Accademici stessi protettori del suo avversario. La rivoluzione di Francia sì funesta per tanti dotti rispettò i meriti suoi, e le sue virtù. Nissuno in più fresca età toccò l' ultima cima di più elevati studi, nissuno godette più lunghi anni la soddisfazione delle proprie scoperte, e l' applauso dei contemporanei, nissuno più lungamente sopravvivrà nell' ammirazione dei posteri, nissuno farà più di La-Grange perenne, e chiara fede dell'eccellenza degli Italiani ingegni.

